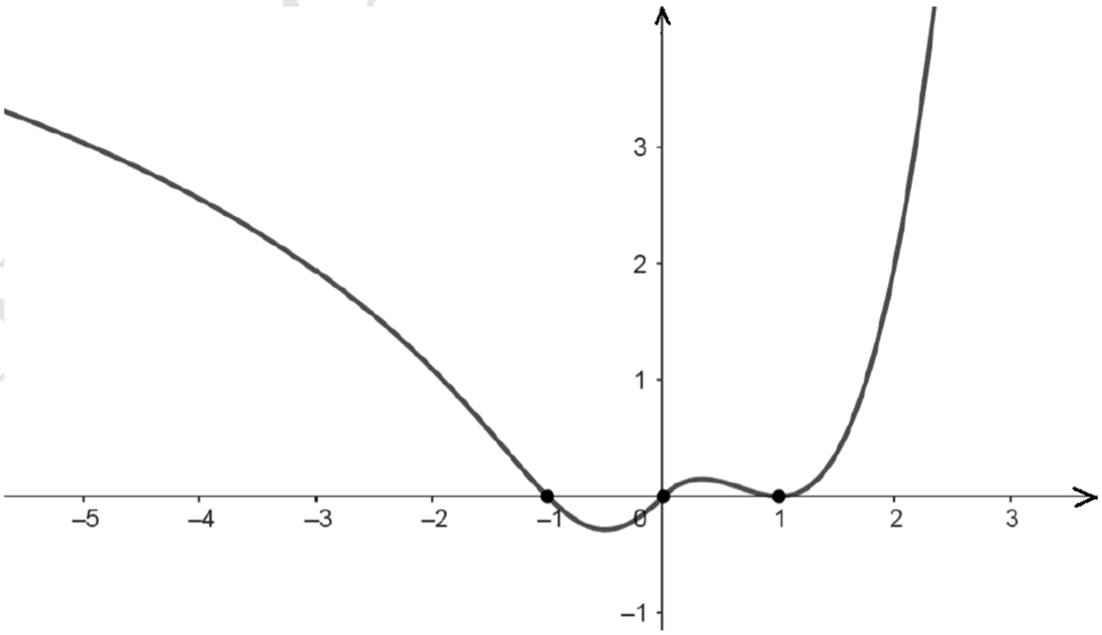
Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 3 luglio 2025

PROBLEMA 2 – soluzione a cura di L. Tomasi



Il grafico γ in figura rappresenta la funzione f così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(P_2(x)\right) & se\ x < 0 \\ P_3(x) & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

dove $P_2(x)$ e $P_3(x)$ sono, rispettivamente, polinomi di 2° e di 3° grado.

a) Utilizzando le informazioni desumibili dal grafico e tenendo conto che γ è tangente alla retta $y = x$ nell'origine e all'asse delle ascisse in $x = 1$, individuare i polinomi $P_2(x)$ e $P_3(x)$.

D'ora in avanti, si assuma che

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + x + 1) & se\ x < 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

b) Determinare le coordinate dei punti stazionari e le ascisse dei punti di flesso di f. Al variare del parametro reale k, stabilire il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

c) Per n intero positivo, determinare $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x^n}$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^n}$. Verificare, inoltre, che esiste un unico valore di n tale che il $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n}$ assuma un valore finito non nullo.

d) Determinare il rapporto tra le aree delle regioni limitate di piano R_1 e R_2 contenute nel I quadrante e così definite:

- R_1 compresa tra γ e la retta di equazione $y = x$;
- R_2 compresa tra γ e l'asse delle ascisse.

Soluzione

Punto a)

a) Utilizzando le informazioni desumibili dal grafico e tenendo conto che γ è tangente alla retta $y = x$ nell'origine e all'asse delle ascisse in $x = 1$, individuare i polinomi $P_2(x)$ e $P_3(x)$.

D'ora in avanti, si assuma che

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + x + 1) & se\ x < 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & se\ x \geq 0 \end{cases}$$

La funzione data è definita sui numeri reali, derivabile (e quindi continua) in tutto il dominio.
Osserviamo che dal grafico non è possibile ricavare informazioni certe, a meno che non siano esplicitate nel testo…
Probabilmente, quindi, gli zeri della funzione sono -1, 0 e 1 (punto doppio, perché la curva è probabilmente tangente all'asse x per $x = 1$).
Per $x \geq 0$, la funzione $f(x) = P_3(x)$. Indicato con $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si ha:

$$\begin{cases} P_3(0) = 0 \\ P_3(1) = 0 \\ P_3'(0) = 1 \\ P_3'(1) = 0 \end{cases}$$

con $P_3'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Pertanto:

$$\begin{cases} d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ c = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases}$$

e $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$.
Consideriamo ora, la funzione polinomiale $P_2(x) = mx^2 + nx + r$. Per $x < 0$, $f(x) = \ln P_2(x)$, che ha per derivata

$$f'(x) = \frac{2mx + n}{mx^2 + nx + r} .$$

Pertanto, ricavando le informazioni (probabili…) dal grafico e in base alla continuità e derivabilità della funzione per $x = 0$, si ha

$$\begin{cases} \ln P_2(-1) = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} \ln P_2(x) = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} (\ln P_2(x))' = 1 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} P_2(-1) = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} \ln(mx^2 + nx + r) = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} \dfrac{2mx + n}{mx^2 + nx + r} = 1 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} m - n + r = 1 \\ \ln r = 0 \\ \dfrac{n}{r} = 1 \end{cases}$$

Ne segue

$$\begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \\ r = 1 \end{cases}$$

Quindi $P_2(x) = x^2 + x + 1$ e la funzione è definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + x + 1) & \text{se } x < 0 \\ x^3 - 2x^2 + x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

come è scritto nel testo.

Punto b)

b) Determinare le coordinate dei punti stazionari e le ascisse dei punti di flesso di f. Al variare del parametro reale k, stabilire il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

La funzione ottenuta è negativa per $-1 < x < 0$ ed è positiva o nulla altrimenti. La funzione non ha asintoti.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} & \text{se } x < 0 \\ 3x^2 - 4x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Studiandone il segno nei due intervalli indicati sopra, la derivata prima è negativa per $x < -\frac{1}{2}$ e per $\frac{1}{3} < x < 1$, e positiva o nulla negli altri intervalli. La $f'(x) = 0$ per $x = -\frac{1}{2}$ (punto di minimo relativo e assoluto), per $x = \frac{1}{3}$ (punto di massimo relativo) e per $x = 1$ (punto di minimo relativo).

Indichiamo il segno della derivata prima e l'andamento della funzione nel seguente schema

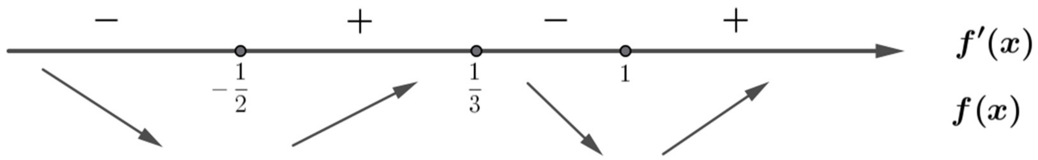


figura 1

Si ha inoltre

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{3}{4}$$
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}.$$

Per $x < 0$, la derivata seconda è:

$$f''(x) = \frac{2(x^2+x+1) - (2x+1)^2}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2+x+1)^2}$$

Pertanto la derivata seconda è:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x^2 - 2x + 1}{(x^2+x+1)^2} & \text{se } x < 0 \\ 6x - 4 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Studiandone il segno nei due intervalli indicati sopra, si trova che la derivata seconda è positiva per $x > \frac{2}{3}$ e per $-\frac{1+\sqrt{3}}{2} < x < 0$ e non negativa negli altri intervalli. I punti di flesso sono pertanto $x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (ascendente), $x = 0$ (discendente) e $x = \frac{2}{3}$ (ascendente). Gli intervalli di convessità e concavità sono pertanto indicati nel seguente schema (figura 2).

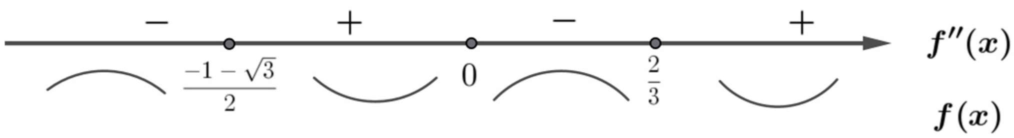


figura 2

Si conferma pertanto il grafico proposto inizialmente dal testo (figura 3).

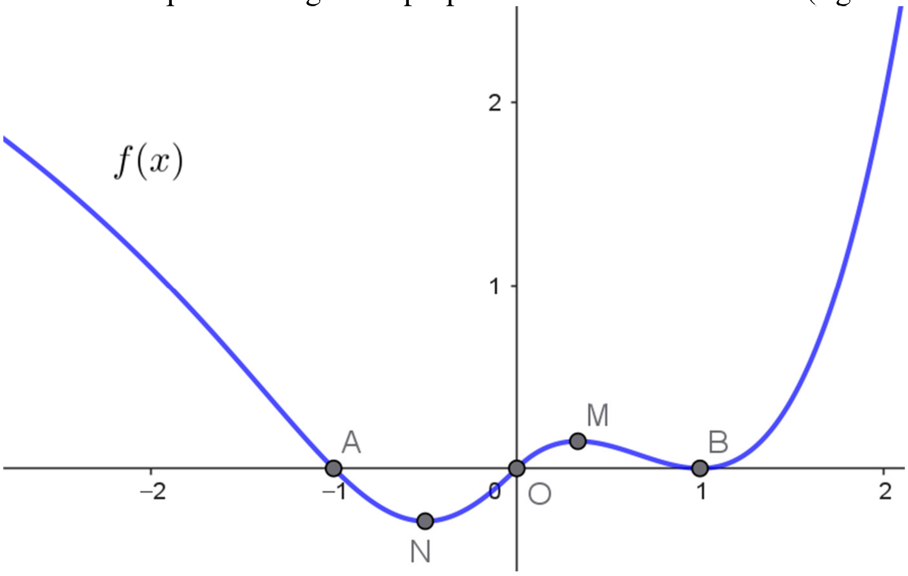


figura 3

Analizziamo ora, in modo grafico, l'equazione parametrica $f(x) = k$, che equivale al sistema (figura 4)

$$\begin{cases} y = k \\ y = f(x) \end{cases}$$

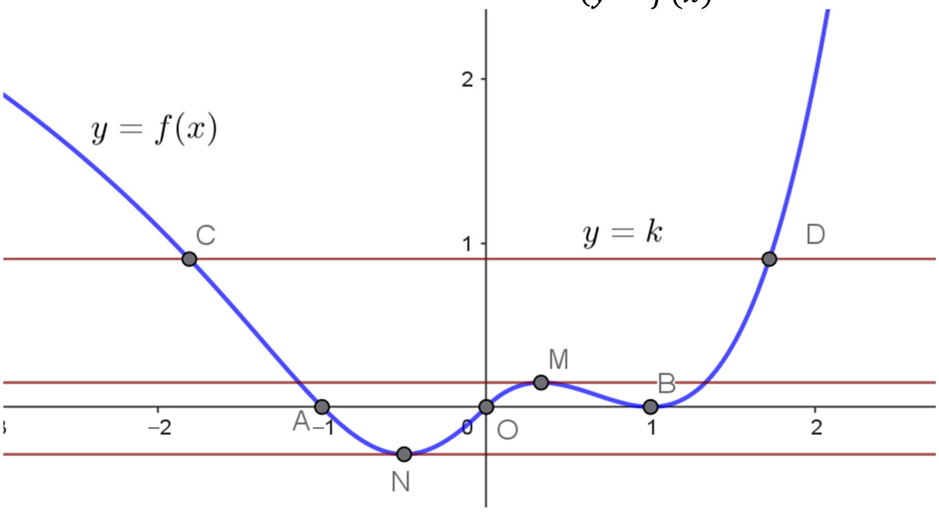


figura 4

Graficamente (figura 4) si conclude:

se $k < \ln\frac{3}{4}$	nessuna soluzione
se $k = \ln\frac{3}{4}$	due soluzioni coincidenti
se $\ln\frac{3}{4} < k < 0$	due soluzioni
se $k = 0$	quattro soluzioni (di cui due coincidenti)
se $0 < k < \frac{4}{27}$	quattro soluzioni
se $k = \frac{4}{27}$	quattro soluzioni (di cui due coincidenti)
se $k > \frac{4}{27}$	due soluzioni distinte.

Punto c)

Sia n un numero naturale positivo. Calcoliamo il seguente limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x^2+x+1)}{x^n} = \text{forma indet.} \frac{\infty}{\infty};$$

applicando la seconda regola di De L'Hospital si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(x^2+x+1)}{x^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{nx^{n-1}(x^2+x+1)}.$$

Quindi per tutti gli $n\geq 1$ il limite è 0.

Sia n un numero naturale positivo. Calcoliamo il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2x^2+x}{x^n}.$$

Per $n=1$ o per $n=2$ il limite è $+\infty$.

Per $n=3$ il limite è 1.

Per tutti gli $n\geq 4$ il limite è 0.

Vogliamo ora calcolare il

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}$$

che dobbiamo calcolare per *x* che tende a 0, da destra e poi da sinistra.

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-2x^2+x}{x^n}.$$

Per $n=1$, questo limite vale 1. Infatti si ha:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-2x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x^2-2x+1)=1.$$

Per $n>1$, si ottiene:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-2x^2+x}{x^n}$$

Raccogliendo al numeratore e semplificando si ottiene ($n>1$):

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-2x+1}{x^{n-1}}=+\infty.$$

Calcoliamo ora il limite per *x* che tende a 0 da sinistra:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(x^2+x+1)}{x^n}=\text{forma indet.}\frac{0}{0}$$

Applicando la prima regola di De L'Hospital si ottiene

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(x^2+x+1)}{x^n}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+1}{nx^{n-1}(x^2+x+1)}.$$

Se $n=1$, si ha quindi

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+1}{x^2+x+1}=1.$$

Se $n>1$, si ha

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+1}{nx^{n-1}(x^2+x+1)}=-\infty \qquad \text{se } n \text{ è pari.}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+1}{nx^{n-1}(x^2+x+1)}=+\infty \qquad \text{se } n \text{ è dispari.}$$

Quindi il limite $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}$ esiste finito (e vale 1) solo nel caso $n=1$.

Il limite $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}$ esiste infinito (e vale $+\infty$) nei casi $n>1$ ed n è dispari.

Se n è pari e maggiore di 1, il limite destro (per *x* tendente a 0) di $\frac{f(x)}{x^n}$ vale $+\infty$ e il limite sinistro vale $-\infty$.

Punto d)

d) Determinare il rapporto tra le aree delle regioni limitate di piano R_1 e R_2 contenute nel I quadrante e così definite:

- R_1 compresa tra γ e la retta di equazione $y = x$;
- R_2 compresa tra γ e l'asse delle ascisse.

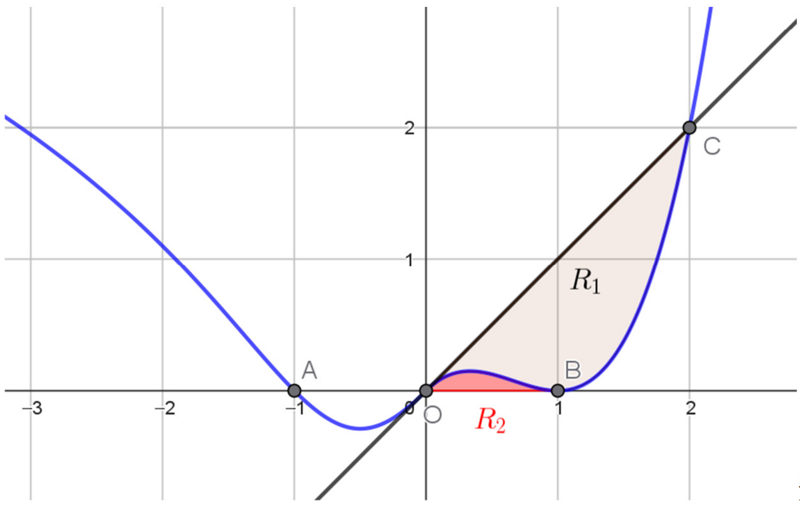


figura 5

Intersechiamo la funzione con la bisettrice del I quadrante: si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$$

e i punti di coordinate $O(0,0)$ e $C(2,2)$.
Pertanto l'area della regione R_1 è data da

$$Area(R_1) = \int_0^2 (x - f(x))\, dx = \int_0^2 (-x^3 + 2x^2)\, dx =$$
$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = -4 + \frac{16}{3} = \frac{4}{3}\ .$$

e l'area della regione R_2 è data da

$$Area(R_2) = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)\, dx =$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No		☐ Non sempre	
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre		☒ Sempre	

Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente