Esame di Stato - sessione suppletiva - seconda prova scritta- Liceo Scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica - 3 luglio 2025

QUESITO 4 - soluzione a cura di Carlo Nicola Colacino

4. Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ sono date le equazioni di due rette:

$$r: \begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x - z = 4 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Dopo aver dimostrato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione del piano che le contiene. Verificare che la sfera di centro $C = (5; -7; 2)$ passante per il punto $P = (1; -1; 0)$ è tangente al piano suddetto.

Soluzione: Poiché le due rette sono date una in forma parametrica ed una come intersezione di un fascio di piani, per verificare che sono incidenti basta verificare che esiste un solo valore del parametro t in corrispondenza del quale il punto $S = (1 + 2t; t; 3 - t)$ appartiene anche alla retta r. Sostituendo si trova:

$$\begin{cases} t - (3 - t) - 1 = 2t - 4 = 0 \\ 1 + 2t - (3 - t) - 4 = 3t - 6 = 0 \end{cases}$$

Entrambe le equazioni sono verificate per $t = 2$, pertanto il punto d'incidenza è $Q = (5; 2; 1)$. Per trovare l'equazione del piano che contiene entrambe le rette, è sufficiente scrivere l'equazione del generico fascio di piani che definiscono la retta r:

$$\alpha(y - z - 1) + \beta(x - z - 4) = 0$$

e poi determinare α e β imponendo l'appartenza al piano di un punto di s, ad esempio il punto che si ottiene ponendo $t = 0$, ossia $T = (1; 0; 3)$. Si trova:

$$-4\alpha - 6\beta = 0$$

ossia $\alpha = 3$ e $\beta = -2$ da cui segue l'equazione del piano

$$\pi : 2x - 3y + z - 5 = 0$$

Per verificare se questo piano è tangente alla sfera data, determiniamo il raggio R di quest'ultima:

$$R = d(C; P) = \sqrt{(1 - 5)^2 + (-7 + 1)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

Troviamo ora la distanza del piano π dal centro della sfera:

$$d(\pi; C) = \frac{|2 \cdot 5 - 3 \cdot (-7) + 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{28}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{14}$$

La distanza del piano dal centro è uguale al raggio delle sfera per cui il piano è tangente alla sfera. Pur non essendo richiesto dal quesito, possiamo trovare il punto di tangenza. La retta perpendicolare al piano e passante per il centro della sfera ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 5 + 2k \\ y = -7 - 3k \\ z = 2 + k \end{cases}$$

Sostituendo questi valori nell'equazione del piano si trova

$$10 + 4k + 21 + 9k + 2 + k - 5 = 14k + 28 = 0 \to k = -2$$

ossia il punto di tangenza del piano con la sfera è proprio: $N(1; -1; 0)$.