Esame di Stato - sessione suppletiva - seconda prova scritta- Liceo Scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica - 3 luglio 2025

QUESITO 7 - soluzione a cura di Carlo Nicola Colacino

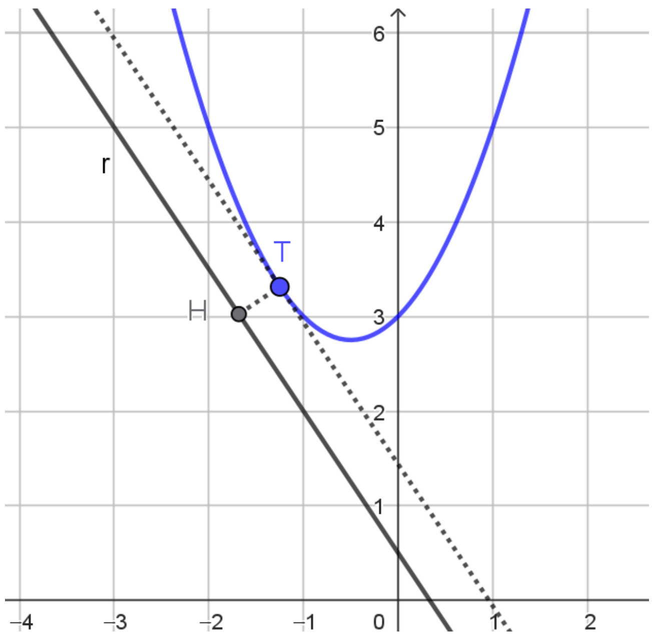
7. Determinare le coordinate del punto T sulla parabola p di equazione $y = x^2+x+3$ nel quale la retta tangente a p risulta parallela alla retta di equazione $3x + 2y - 1 = 0$. Spiegare perché, sulla parabola p, il punto T è quello che si trova alla minima distanza dalla retta r.

Soluzione: La retta data ha coefficiente angolare $m = -3/2$. Il coefficiente angolare della retta tangente in un punto è pari al valore della derivata in quel punto, pertanto

$$2x_0 + 1 = -\frac{3}{2} \rightarrow 2x_0 + \frac{5}{2} = 0 \rightarrow x_0 = -\frac{5}{4}$$

Sostituiamo questo valore nell'equazione della parabola per trovare la corrispondente y:

$$y = \left(-\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right) + 3 = \frac{25}{16} - \frac{5}{4} + 3 = \frac{25-20+48}{16} = \frac{53}{16}$$



Il punto di tangenza è pertanto $T\left(-\frac{5}{4}; \frac{53}{16}\right)$ e l'equazione della retta tangente la troviamo sostituendo le coordinate di T nell'equazione della generica retta parallela alla retta r, ossia $3x + 2y + q = 0$:

$$3 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + 2\left(\frac{53}{16}\right) + q = -\frac{15}{4} + \frac{53}{8} + q = \frac{23}{8} + q = 0$$

da cui ricavo l'equazione della retta tangente in T alla retta r:

$$3x + 2y - \frac{23}{8} = 0$$

o, in forma esplicita,

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{23}{16}.$$

La seconda parte può essere trattata come un problema di ottimizzazione: vogliamo dimostrare che il punto trovato è il più vicino alla retta r e per farlo cerchiamo il minimo della distanza tra il generico punto della parabola e la retta r. Il generico punto sulla parabola ha coordinate $P = (x; x^2 + x + 3)$ e la distanza punto-retta è:

$$d(P; r) = \frac{|3x + 2(x^2 + x + 3) - 1|}{\sqrt{13}} = \frac{|2x^2 + 5x + 5|}{\sqrt{13}}$$

Il trinomio al numeratore (argomento del valore assoluto) è sempre positivo ($\Delta = 25 - 40 = -15$) e pertanto posso togliere il valore assoluto e cercare il minimo della funzione $f(x) = 2x^2 + 5x + 5$. Essendo $f(x)$ una parabola, con $a > 0$, il minimo si ha nel punto $x = -\frac{5}{4}$, che è l'ascissa del vertice.
Pertanto il punto $\left(-\frac{5}{4}; \frac{53}{16}\right)$ è quello che rende minima la distanza tra la parabola di equazione $y = x^2 + x + 3$ e la retta data, cioè è il punto della parabola più vicino alla retta.