Esame di Stato – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 3 luglio 2025

QUESITO 8 - soluzione di L. Tomasi

8. Sia data la funzione $f(x) = axln(x) + \frac{b}{x^4} + c\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determinare i parametri a, b, c in modo che:
   - il $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ esista ed abbia un valore finito;
   - $\int_1^e f(x)dx = 1$.

Soluzione

a) Consideriamo la funzione

$$f(x) = a\,x\ln x + \frac{b}{x^4} + c\sin\frac{1}{x}$$

dobbiamo imporre che il limite per x tendente a 0 da destra esista ed abbia un valore finito.

Se il parametro b fosse diverso da 0, si avrebbe

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x^4} = +\infty \text{ (se } b > 0)$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x^4} = -\infty \text{ (se } b < 0).$$

Pertanto ne consegue che deve essere $b = 0$.

Se il parametro c fosse diverso da zero allora il limite (per x tendente a 0 da destra) della funzione $c\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ non esisterebbe. Pertanto anche c deve essere uguale a 0.

Rimane pertanto il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+}(a\,x\ln x) = a \lim_{x\to 0^+}(x\ln x)$$

che è un limite notevole che si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Riscrivendo il limite nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, si può applicare la seconda regola di De l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Quindi il parametro a, in base alla prima condizione, può essere un qualsiasi numero reale.

b) Imponiamo la condizione

$$\int_1^e f(x)dx = 1\,.$$

Si ha quindi

$$\int_1^e a\, x \ln x\, dx = 1$$

ovvero

$$a \int_1^e x \ln x\, dx = 1$$

Calcoliamo inizialmente (per parti) l'integrale notevole:

$$\int x \ln x\, dx :$$

Si ottiene:

$$\int x \ln x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c\,.$$

Ritornando all'integrale definito contenuto nell'equazione data, si ha:

$$a \int_1^e x \ln x\, dx = 1$$

$$a\left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e = 1$$

$$a\left[\frac{1}{2}e^2 \ln e - \frac{1}{4}e^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right] = 1$$

$$a\left[\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)\right] = 1$$

$$a\left(\frac{e^2+1}{4}\right) = 1$$

e finalmente

$$a = \frac{4}{e^2+1}\,.$$

In definitiva, si ha:

$$a = \frac{4}{e^2+1}\,, \quad b = 0, \quad c = 0.$$

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del quesito	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☐ Sì	☒ No		☐ Non sempre	

È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☒ Non sempre	☐ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☐ Sì	☒ Solo parzialmente	☐ No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☐ Sì	☒ No	☐Parzialmente